Лекция 2
Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Есть в многограннике решений
Немало точек угловых,
Но симплекс-метод, без сомнений,
Даст оптимальную средь них.

2.1. Графическим методом решения задач ЛП, рассмотренным в лекции 1, удобно пользоваться в случае, когда число переменных задачи $n = 2$. Если $n = 3$, то геометрический образ задачи переносится в 3-х мерное пространство, где пользоваться им становится затруднительно. Ну, а если $n > 3$, графический метод решения задачи ЛП вообще теряет смысл. Таким образом, необходимо построить общий алгебраический метод решения, где вычисление координат оптимальной точки не будет зависеть от геометрического образа ОДР.

Основная теорема ЛП определяет оптимальной одну из угловых точек ОДР, но не менее важным является следствие из этой теоремы.

Следствие из теоремы 1.2. Множество угловых точек многогранника решений основной задачи ЛП *конечно*.

Отсюда следует, что в основу алгебраического метода решения может быть положен перебор значений ЦФ в каждой такой точке с целью поиска максимального (минимального) из них. Но для этого необходимо:

1) найти аналитически координаты вершин – угловых точек многогранника ОДР - $\overline{X}_{угл}^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_2^{(k)}\right)$, где k - номер угловой точки.
2) вычислить значение ЦФ в каждой угловой точке - $z_k = z\left(\overline{X}_{угл}^{(k)}\right)$;
3) получить последовательность чисел $\{z_k\}$, из которых выбрать максимальное или минимальное в соответствии с направлением оптимизации ЦФ задачи ЛП.

Попробуем оценить вычислительную сложность такого метода.

2.2. В плоской задаче ЛП, где $n = 2$, координаты угловой точки определяются совместным решением 2-х уравнений прямых, в которые «превращаются» соответствующие неравенства системы ограничений основной задачи ЛП. В пространственной задаче, т.е. задачи ЛП где $n = 3$ – 3-х уравнений плоскостей, полученных с помощью таких же «превращений».

Для n - мерного пространства (гиперпространства) существует специальная теорема, что координаты угловой точки гипермногогранника являются решением алгебраической системы n уравнений с n неизвестными (т.е. пересечением n гиперплоскостей) – (2.1). При этом число уравнений обязательно должно быть равно числу неизвестных в системе уравнений (2.1) – это является необходимым условием существования ее решения.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

Тогда, для автоматизации процесса решения системы (2.1), т.е. вычисления координат одной из угловых точек гипермногогранника, можно было бы воспользоваться мощным аппаратом линейной алгебры для поиска решения системы n линейных уравнений с n неизвестными.

Но для этого, чтобы обойтись без «превращений», о которых говорилось выше, необходимо ограничения в основной задаче ЛП записать в форме равенств. Для этого переходят к ***канонической форме*** записи основной задачи линейного программирования.

2.3. Неравенства в основной задаче ЛП (см. лекцию 1) имеют вид:

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leqslant b_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{2.2}
$$

т.е. представляют собой систему m неравенств с n переменными, причем $m \neq n$. Превратим неравенства (2.2) в равенства с помощью введения ***дополнительных*** m переменных. При этом n уже использованных переменных

$$
x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0,
$$

которые представляют собой, с экономической точки зрения, объемы каждого из n видов выпускаемой продукции, называются ***основными***.

Тогда, основная задача ЛП принимает следующий вид. Найти максимум функции

$$
z\left(\overline{X}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j, \tag{2.2}
$$

если на переменные наложены следующие ограничения

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m
\end{cases}
\tag{2.3}
$$

При этом дополнительные переменные, с экономической точки зрения, являются ***остатками*** соответствующего вида ресурса после выполнения оптимального плана производства, исходя из (2.3) могут быть вычислены по формулам

$$
x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j, \;\; i = \overline{1,m} \tag{2.4}
$$

и, поэтому, также должны быть неотрицательными $x_{n+i} \geqslant 0$.

Формально, дополнительные переменные могут быть введены в ЦФ с нулевыми коэффициентами (поскольку прибыль производства от остатков продукции не зависит).

Тогда, задача, состоящая в том, чтобы найти

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + \sum_{i=1}^{m} 0 \cdot x_{n+i} \to max \tag{2.5}$$

если на переменные наложены следующие ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ + \ 1 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + ... + 0 \cdot x_{n+m} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + \ 0 \cdot x_{n+1} + 1 \cdot x_{n+2} + ... + 0 \cdot x_{n+m} = b_2 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + 0 \cdot x_{n+1} + 0 \cdot x_{n+2} + ... + 1 \cdot x_{n+m} = b_m \end{cases} \tag{2.6}$$

и

$$x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m} \geqslant 0 \tag{2.7}$$

называется ***канонической (расширенной)*** задачей ЛП. С математической точки зрения, решения основной и канонической задач ЛП являются эквивалентными.

Теорема 2.1. Оптимальные планы основной и канонической задач ЛП имеют взаимно однозначное соответствие.

Это означает, что если существует оптимальное решение основной задачи

$$\overline{X}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*), \tag{2.8}$$

то, зная его координаты, можно однозначно найти значения x_{n+i}^* по формулам (2.4) и определить оптимальное решение канонической задачи

$$\overline{X}^*_{кан} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, x_{n+1}^*, ..., x_{n+m}^*) . \tag{2.9}$$

Верно и обратное, если известны координаты вектора (2.9), то, отбрасывая последние его m компонент, однозначно получим вектор (2.8).

Этот важный факт позволяет заменить решение основной задачи ЛП решением канонической задачи (2.5) – (2.7). Таким образом, координаты угловых точек многогранника ОДР можно найти, решая систему уравнений (2.6).

Для того, чтобы использовать здесь возможности аппарата линейной алгебры, можно представить каноническую задачу ЛП в векторной форме записи.

2.4. Пусть $\overline{C} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ - вектор-строка цен (норм прибыли) на n видов производимой продукции. Пусть, также, заданы векторы-столбцы:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}; \ \overline{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \ (j = \overline{1,n}); \ \overline{A}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{A}_{n+2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}, ..., \ \overline{A}_{n+m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}; \ \overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix};$$

где $\overline{X}$ определяет объемы производимой продукции, $\overline{A_j}$ - нормы расхода каждого из m ресурсов на единицу j-го вида продукции, $\overline{B}$ - объемы запасов каждого ресурса, а вектора $\overline{A_{n+i}}$, $(i=\overline{1,m})$ - являются единичными. Тогда, задача оптимизации

$$max\ Z = \overline{C} \cdot \overline{X}, \tag{2.10}$$

при ограничениях

$$\overline{A_1} \cdot x_1 + \overline{A_2} \cdot x_2 + ... + \overline{A_n} \cdot x_n + \overline{A_{n+1}} \cdot x_{n+1} + ... + \overline{A_{n+m}} \cdot x_{n+m} = \overline{B} \tag{2.11}$$

и

$$\overline{X} \geqslant 0,\ \ x_{n+i} \geqslant 0,\ \ (i=\overline{1,m}) \tag{2.12}$$

называется ***векторной формой*** *записи* канонической задачи ЛП.

Из линейной алгебры известно, что система уравнений (2.11) будет иметь решение, если система векторов $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_{n+m}}$ является линейно независимой, т.е., определитель системы

$$\det\left(\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_{n+m}}\right) \neq 0,$$

а число уравнений системы равно числу неизвестных. В нашем же случае число уравнений m, а число переменных $m+n$, так что ни о каком решении системы (2.11) не может быть и речи.

Поэтому, необходимо обнулить любые n переменных, чтобы выполнить условие $m=n$, получить линейно независимую систему векторов и, соответственно, координаты угловой точки как ее решение.

Проще всего координаты *первой* или ***начальной*** угловой точки получить, если в системе (2.11) или соответственно (2.6) обнулить все *основные* переменные задачи:

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

а, значения дополнительных переменных в этой точке можно найти с помощью формул (2.4)

$$x_{n+i}^0 = b_i,$$

тогда координаты начальной угловой точки в многограннике ОДР будут:

$$\overline{X}^0 = \left\{x_1^0 = 0; x_2^0 = 0; ...; x_n^0 = 0; x_{n+1}^0 = b_1; ..., x_{n+m}^0 = b_m\right\}.$$

Из линейной алгебры известно, что в этом случае *единичные* вектора $\overline{A_{n+1}}, \overline{A_{n+2}}, ..., \overline{A_{n+m}}$ образуют ***базис*** m- мерного пространства.

Очевидно, что координаты любой другой угловой точки можно получить, обнуляя любые другие n переменных и получая значения остальных m переменных как решение линейно независимой системы уравнений (2.6).

Таким образом, в структуре координат угловой точки многогранника ОДР некоторые n переменных всегда будут нулевыми. Их называют ***свободными*** переменными. Остальные же m переменных всегда будут иметь неотрицательные значения. Эти переменные называют ***базисными***. Например, для начальной угловой точки

$$\overline{X}^0 = \left\{ \underbrace{x_1^0 = 0; x_2^0 = 0; ...; x_n^0 = 0;}_{n \text{ свободных переменных}} \;\; \underbrace{x_{n+1}^0 = b_1; ..., x_{n+m}^0 = b_m}_{m \text{ базисных переменных}} \right\}.$$

В качестве следующей угловой точки можно взять точку $\overline{X}^{(1)}$, в которой одна из свободных переменных, например, x_1 - становится базисной, взамен – одна из базисных переменных, например, x_{n+m}, становится свободной. Тогда в структуре координат точки $\overline{X}^{(1)}$ будет

$$\overline{X}^{(1)} = \left\{ \underbrace{x_{n+m}^{(1)} = 0,\ x_2^{(1)} = 0, ...,\ x_n^{(1)} = 0;}_{n \text{ свободных переменных}} \;\; \underbrace{x_{n+1}^{(1)},\ x_{n+2}^{(1)} ...,\ x_{n+m-1}^{(1)},\ x_1^{(1)}}_{m \text{ базисных переменных}} \right\}.$$

Причем, значения m базисных переменных для точки $\overline{X}^{(1)}$ будут уже вычисляться по всем правилам линейной алгебры для решения систем линейных уравнений.

Аналогично процесс вычисления координат следующих угловых точек многогранника ОДР будет продолжаться дальше, но для каждой из них в структуре координат ***всегда*** будет n ***свободных*** переменных – *по числу основных переменных* и ***всегда*** будет m ***базисных*** переменных – *по числу дополнительных переменных* канонической задачи ЛП.

Не следует смешивать основные и дополнительные переменные со свободными и базисными переменными канонической задачи ЛП!

Основные и дополнительные переменные определяются на стадии формирования канонической задачи и остаются ***неизменными*** до конца процесса решения.

Свободные и базисные переменные постоянно заменяют друг друга для каждой следующей угловой точки, но так, чтобы общая структура координат каждой из них (о которой говорилось выше) оставалась ***постоянной.***

Определение 2.1. Решение системы линейных уравнений (2.6) в структуре координат, которого n координат имеют нулевые значения, а остальные m - неотрицательные значения называется ***базисным***.

Теорема 2.2. Если система векторов $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_{n+m}}$ содержит m линейно независимых векторов (например, первые m векторов $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_m}$), то допустимый план задачи ЛП

$$\overline{X} = \left(\underbrace{x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m;}_{m \text{ координат}} \;\; \underbrace{0,\ 0,\ ...,\ 0}_{n \text{ координат}} \right)$$

является угловой точкой многогранника ОДР.

Определение 2.2. Угловая точка многогранника ОДР, координаты которой определяются как базисное решение системы (2.6), называется ***опорной точкой***, а соответствующее ей решение (план) задачи ЛП называется ***опорным планом***.

Таким образом, алгоритм метода перебора координат всех угловых точек многогранника ОДР представляет собой циклический процесс, в который входят следующие операции:

1) выбор m любых векторов в качестве базиса, т.е. обнуление любых n переменных в системе (2.6);
2) определение линейной независимости m выбранных векторов;
3) решение системы уравнений (2.6) с m неизвестными и определение значения базисных переменных в очередном опорном плане (координат опорной точки);
4) вычисление значения ЦФ задачи ЛП в этой опорной точке;
5) занесение этого значения в память.

В заключении необходимо выбрать максимальное (минимальное) значение целевой функции из всех сохраненных.

Очевидно, что вычислительная сложность такого алгоритма очень велика. Например, одних сочетаний выбираемых m векторов из $m+n$ заданных будет

$$C_m^{m+n} = \frac{(n+m)!}{m! \cdot n!},$$

что при обычных параметрах практических задач ЛП ($n = 20,\ m = 30$) достигает астрономических величин. По оценкам, для ЭВМ 80-х годов XX в. длительность таких расчетов достигала нескольких лет!

Отсюда понятно, что для практических целей идеей такого алгоритма должен быть другой подход.

2.5. Идея ***симплекс - метода*** (в дальнейшем СМ) состоит в том, чтобы определить координаты *только* тех угловых точек (вспомним геометрическое представление задачи ЛП), в которых значение целевой функции *лучше* предыдущего: *больше* для задачи максимизации или *меньше* для задачи минимизации. Соответственно, вычислительная сложность алгоритма резко сокращается, и решение можно найти за относительно небольшое число ***шагов (итераций)***.

Свое название метод получил от латинского слова simplex – простой, а также от простейшего выпуклого многогранника в n- мерном пространстве с $n+1$ вершиной (например, тетраэдр в 3-х мерном пространстве), который назвали ***симплексом***.

Для того, чтобы целенаправленно переходить к такой угловой точке многогранника решений, где значение ЦФ будет заведомо лучше, в каждой полученной опорной точке СМ определяется направление (ребро многогранника ОДР), в котором ЦФ возрастает (убывает) быстрее всего.

Отсюда происходит другое название СМ – метод последовательного улучшения планов. Этот процесс схематично изображен на рис.2.1.

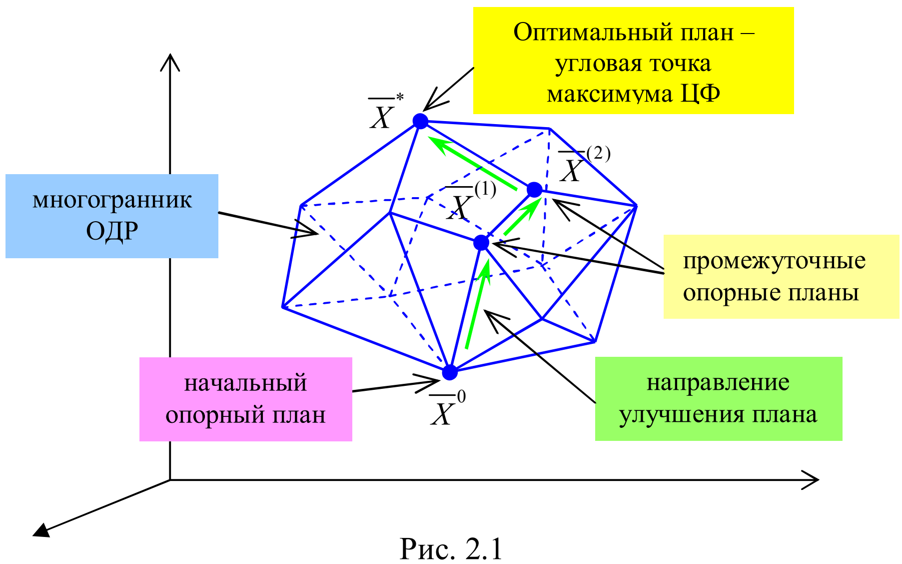


Рис. 2.1

Формально, в алгоритме СМ процесс последовательного улучшения значения ЦФ при переходе от одной угловой точки к другой выражается проведением определенных вычислительных процедур при переходе от одной итерации (шага вычислений) к другой.

Существует несколько разновидностей – способов реализации идеи СМ. Рассмотрим подробно все шаги алгоритма симплекс-метода по способу Дж. Данцига (американского математика, который первым его разработал) на конкретном примере.

Задача 2.1. Найти оптимальный план производства 3-х видов продукции из 3-х видов сырья, приносящий фирме максимальный доход, если задан вектор цен на продукцию - $\overline{C}$, вектор запасов каждого ресурса - $\overline{B}$ и технологические нормы их расхода на производство единицы каждого вида продукции в форме матрицы A:

$$\overline{C} = (c_1, c_2, c_3); \quad \overline{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы A, очевидно, являются координатами соответствующих векторов $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ и $\overline{A}_3$.

Решение. Выразим искомый план производства (объемы производства каждого вида продукции) в форме вектора

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда математическую модель задачи 2.1 можно записать в ***матричной форме*** – (2.13), а также с помощью ***векторной*** – (2.14) и ***координатной*** форм записи:

$$\begin{cases} z\left(\overline{X}\right) = max\ \overline{C} \cdot \overline{X} \\ A \cdot \overline{X} \leqslant \overline{B} \\ \overline{X} \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2.13) \qquad \begin{cases} z\left(\overline{X}\right) = max\ \overline{C} \cdot \overline{X} \\ \overline{A}_1 \cdot x_1 + \overline{A}_2 \cdot x_2 + \overline{A}_3 \cdot x_3 \leqslant \overline{B} \\ \overline{X} \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2.14)$$

$$\begin{cases} z\left(\overline{X}\right) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 \to max \\ a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \leqslant b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \leqslant b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \leqslant b_3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2.15)$$

Введем необходимые числовые данные координат векторов и запишем модель задачи 2.1 в координатной числовой форме:

$$\begin{cases} z\left(\overline{X}\right) = 9 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 16 \cdot x_3 \to max \\ 18 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 \leqslant 360 \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \leqslant 192 \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leqslant 180 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases} .$$

Приведем задачу к каноническому (расширенному) виду:

$$\begin{cases} z\left(\overline{X}\right) = 9 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 16 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 \to max \\ 18 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 360 \\ 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 = 192 \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 = 180 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2.16)$$

и запишем ее в векторной форме:

$$\begin{cases} z\left(\overline{X}\right) = max\ \overline{C} \cdot \overline{X} \\ \overline{A}_1 \cdot x_1 + \overline{A}_2 \cdot x_2 + \overline{A}_3 \cdot x_3 + \overline{A}_4 \cdot x_4 + \overline{A}_5 \cdot x_5 + \overline{A}_6 \cdot x_6 = \overline{B} \\ \overline{X} \geqslant 0 \end{cases} \qquad (2.17)$$

где:

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_6 \end{pmatrix};\ \overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix};\ \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix};\ \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \overline{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overline{B} = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}$$

а вектор-строка цен на продукцию $\overline{C} = (9,\ 10,\ 16,\ 0,\ 0,\ 0)$.

По сути, СМ начинается только сейчас, когда математическая модель задачи в форме (2.16) записывается в форме особой таблицы, которую так и называют – начальная ***симплекс – таблица*** (СМ - таблица) - табл.2.1.

Табл. 2.1

Базис	$C_j^б$	9	10	16	0	0	0	B_i	Θ
		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6		
X_4	0	18	15	12	1	0	0	360	
X_5	0	6	4	8	0	1	0	192	
X_6	0	5	3	3	0	0	1	180	
$\Delta j\ =$		- 9	-10	-16	0	0	0	**0**	

единичная подматрица

Здесь нужны некоторые пояснения. Числа самой верхней строки в столбцах с 2-го по 8-й – есть коэффициенты ЦФ задачи (2.16) при соответствующих переменных, которые записаны строкой ниже.

Далее, в столбцах каждой переменной располагаются соответствующие координаты соответствующих векторов задачи (2.17) - $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_6$. 9-й столбец - B_i - содержит координаты вектора $\overline{B}$.

Все эти ячейки, располагающиеся в столбцах со 2-го по 9-й и строках с 3-й по 6-ю табл. 2.1 являются *рабочим полем* каждой СМ-таблицы. В начальной таблице в них, фактически, записана вся система уравнений – ограничений канонической задачи (2.16). Последний столбец Θ является вспомогательным и будет использоваться дальше.

В первом столбце записываются *базисные переменные* – те переменные, значения которых являются неотрицательными для соответствующего опорного плана, т.е. являются компонентами единичных векторов, образующих базис в соответствующей угловой точке.

Как следует из (2.4) такими переменными в начальной опорной точке данной задачи будут x_4, x_5, x_6, а векторами, образующими базис пространства в начальной угловой точке многогранника ОДР – векторы $\overline{A}_4,\ \overline{A}_5,\ \overline{A}_6$. При этом координаты этих векторов образуют ***единичную подматрицу***. Именно поэтому переменные x_4, x_5, x_6 и записаны в 1-м столбце таблицы – базис.

Значения базисных переменных для начального опорного плана «автоматически» формируются в столбце B_i, т.к. согласно (2.4) для данной задачи

$$x_4 = b_1 = 360;\ x_5 = b_2 = 192;\ x_6 = b_3 = 180.$$

В следующих СМ-таблицах (на следующих шагах вычислений) значения базисных переменных также будут формироваться в столбце B_i с помощью определенных вычислительных процедур.

Таким образом, в начальной СМ-таблице фактически содержатся компоненты первого допустимого базисного решения, т.е. координаты начальной угловой точке в многограннике ОДР. Значения базисных переменных, как уже говорилось, есть

$$x_4^0 = 360;\ x_5^0 = 192;\ x_6^0 = 180,$$

а значения свободных переменных (которые не входят в число базисных)

$$x_1^0 = 0;\ x_2^0 = 0;\ x_3^0 = 0.$$

Следовательно, координаты начальной угловой точки (начального опорного плана)

$$\overline{X}^0 = \left(\underbrace{x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 0,\ x_3^0 = 0;}_{n=3 \text{ свободных переменных}}\ \underbrace{x_4^0 = 360,\ x_5^0 = 192,\ x_6^0 = 180}_{m=3 \text{ базисных переменных}} \right)$$

в полном соответствии с теоремой о структуре координат угловой точки ОДР (терема 2.2.).

Значение ЦФ в начальной угловой точке

$$z\left(\overline{X}^0\right) = \overline{C} \cdot \overline{X}^0 = 0$$

записывают в последней строке столбца B_i.

Во втором столбце таблицы 2.1 – столбце $C_j^б$ – записывают коэффициенты ЦФ при соответствующих переменных, занесенных в столбец базиса. Для удобства записи они располагаются, как уже говорилось, в самой верхней строке СМ-таблицы.

Особо следует сказать про последнюю строку СМ-таблицы, которая называется Δ***- строкой*** и содержит т.н. Δ- ***оценки*** всех переменных задачи, которые определяются по формуле

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_j^б \cdot a_{ij} - c_j,\ j = \overline{1,n}.$$

Например, определим Δ- оценку переменной x_1:

$$\Delta_1 = c_1^б \cdot a_{11} + c_2^б \cdot a_{21} + c_3^б \cdot a_{31} - c_1 = 0 \cdot 18 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 - 9 = -9.$$

Это число и записано в Δ- строке начальной СМ-таблицы в столбце «напротив» переменой x_1.

Аналогично вычисляются Δ- оценки остальных переменных задачи

$$\Delta_2 = c_1^б \cdot a_{12} + c_2^б \cdot a_{22} + c_3^б \cdot a_{32} - c_2 = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 - 10 = -10,$$

$$\Delta_3 = c_1^б \cdot a_{13} + c_2^б \cdot a_{23} + c_3^б \cdot a_{33} - c_3 = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 3 - 16 = -16,$$

$$\Delta_4 = c_1^б \cdot a_{14} + c_2^б \cdot a_{24} + c_3^б \cdot a_{34} - c_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_5 = c_1^б \cdot a_{15} + c_2^б \cdot a_{25} + c_3^б \cdot a_{35} - c_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$

$$\Delta_6 = c_1^б \cdot a_{16} + c_2^б \cdot a_{26} + c_3^б \cdot a_{36} - c_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

То, что Δ- оценки базисных переменных получились нулевые – не случайность и является характерной особенностью СМ: ***Δ- оценки базисных переменных всегда должны получаться нулевыми.*** Этим можно с успехом пользоваться для контроля вычислений в СМ-таблицах.

Значения элементов Δ- строки каждой СМ-таблицы будут использоваться для проверки оптимальности полученного решения на каждом шаге вычислений СМ.

Итак, начальная СМ-таблица заполнена, и координаты начального опорного плана $\overline{X}^0$ определены. Дальнейшие шаги (итерации) алгоритма СМ для решения задачи ЛП определяют следующие теоремы.

Теорема 2.3. Опорный план $\overline{X}^{(s)}$, где $s = 1,2,3,...$ - номер итерации, является *оптимальным*, если в СМ-таблице соответствующей этому плану $\forall j = \overline{1, n+m}$ выполняется условие

$$\Delta_j \geqslant 0.$$

Это означает, в оптимальной точке $\overline{X}^*$ *все* Δ- оценки в СМ-таблице будут неотрицательными.

Теорема 2.4. Если для некоторого $j = k$ в СМ-таблице $\Delta_k < 0$ и среди чисел $a_{i\,k}$ $(i = \overline{1,m})$ нет положительных ($a_{i\,k} \leqslant 0$), то ЦФ задачи ЛП *не ограничена* на множестве ее планов.

Эта теорема определяет условие *неразрешимости* задачи ЛП.

Теорема 2.5. Если в опорном плане $\overline{X}^{(s)}$ для некоторого $j = k$ в СМ-таблице $\Delta_k < 0$ и среди чисел $a_{i\,k}$ $(i = \overline{1,m})$ есть положительных (не все $a_{i\,k} \leqslant 0$), то $\exists$ $\overline{X}^{(s+1)}$ - новый опорный план, такой что

$$z\left(\overline{X}^{(s+1)}\right) > z\left(\overline{X}^{(s)}\right) \text{ - для задачи максимизации ЦФ,}$$

$$z\left(\overline{X}^{(s+1)}\right) < z\left(\overline{X}^{(s)}\right) \text{ - для задачи минимизации ЦФ.}$$

Эта теорема определяет условия, при которых значение ЦФ может быть *улучшено*.

Рассмотрим применение этих общих теорем на примере конкретной задачи 2.1. В Δ- строке начальной СМ-таблицы (табл.2.1) есть отрицательные элементы - Δ_1, Δ_2, Δ_3 - в столбцах которых есть положительные числа (в данном случае они все положительны).

Это означает, что выполняются условия теоремы 2.5 и значение ЦФ может быть улучшено с помощью перехода к новому опорному плану. Для этого необходимо выполнить следующие операции.

1. Определить ***разрешающий столбец*** с номером j в текущей СМ-таблице по критерию $\max \left|\Delta_j\right|$, если $\Delta_j < 0$. В табл. 2.1 это условие

$$\max_{\Delta_j<0} |\Delta_j| = |\Delta_3 = -16| = 16$$

выполняется для столбца с номером $j = 3$. Это означает, что при переходе к следующему опорному плану в базис будет вводиться *новый единичный вектор* $\overline{A}_j$ с номером соответствующим номеру разрешающего столбца – т.е. $\overline{A}_3$. Этот столбец отмечен в начальной СМ-таблице зеленой стрелкой на рис.2.2.

Кстати, выбор разрешающего столбца легко обосновать с экономической точки зрения: в план производства, который должен приносить максимальную прибыль естественно, в первую очередь, включать товары с наибольшей ценой. Тогда начинать надо с товаров 3-го вида продукции, цена которых $c_3 = 16$ - максимальна.

Базис	$C_j^б$	9	10	16	0	0	0	B_i	Θ
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	0	18	15	12	1	0	0	360	30
x_5	0	6	4	***8***	0	1	0	192	24
x_6	0	5	3	3	0	0	1	180	60
Δj =		- 9	-10	-16	0	0	0	0	

Рис.2.2

Как мы уже знаем, структура координат любого опорного плана должна оставаться постоянной. В данной задаче в базисе все время будет 3 вектора (3 переменных в столбце базис) по числу ограничений задачи $m = 3$. Следовательно, вводя в новый базис новый вектор $\overline{A}_3$, какой-то из прежних векторов должен быть из базиса выведен. Чтобы узнать – какой именно, необходимо выполнить следующую операцию.

2. Определить ***разрешающую строку*** в текущей СМ-таблице, пользуясь критерием $\min\limits_{i=\overline{1,m}} \left[\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{i\,j_{разр}}}\right]$, где θ_i - элементы дополнительного столбца Θ, а $a_{i\,j_{разр}}$ - *только положительные* элементы разрешающего столбца ($a_{i\,j_{разр}} > 0$).

В начальной СМ-таблице данной задачи находим элементы Θ- столбца.

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a_{1\,3}} = \frac{360}{12} = 30;\ \theta_2 = \frac{b_2}{a_{2\,3}} = \frac{192}{8} = 24;\ \theta_3 = \frac{b_3}{a_{3\,3}} = \frac{180}{3} = 60;$$

и выбираем соответственно θ_2. Это означает, что при переходе к следующему опорному плану из базиса *будет выведен* вектор $\overline{A}_5$, что и отмечено на рис.2.2 красной стрелкой.

Кстати, выбор вектора $\overline{A}_5$ (и соответственно x_5) также можно объяснить с экономической точки зрения. В данной задаче 2-й вид ресурса является *сдерживающим фактором производства*, т.к. его запасов 192 ед. хватит на производство $\dfrac{192}{8} = 24$ шт. изделий 3-го вида продукции, в то время как 1-го ресурса хватит на $\dfrac{360}{12} = 30$ шт., а 3-го ресурса - даже на $\dfrac{180}{3} = 60$ шт. изделий 3-го вида продукции.

3. Определяем ***разрешающий элемент*** текущей СМ-таблицы, который стоит на ***пересечении*** *разрешающего столбца* и *разрешающей строки*. Он будет играть ключевую роль при переходе к новому опорному плану.

В данной задаче разрешающий элемент будет находиться на пересечении 3-го столбца и 4-й строки таблицы 2.1. Он выделен на рис. 2.2 синим цветом.

После выполнения подготовительных операций 1-3 можно непосредственно осуществить переход к новому опорному плану. Для этого необходимо выполнить следующие операции.

4. Записываем в столбец базиса новой СМ-таблицы те переменные, единичные вектора при которых будут образовывать новый базис. Как было определено выше – это переменные x_4, x_3, x_6. Записывать следует именно в таком порядке: x_3 вместо x_5, остальные на своих прежних местах.

В столбце $C_j^б$ напротив новой переменной x_3 пишем ее коэффициент в ЦФ – 16. Поскольку единичные вектора $\overline{A}_4, \overline{A}_3, \overline{A}_6$ образуют базис, их координаты вновь образовывают *единичную подматрицу*, которая показана на рис. 2.3.

Базис	$C_j^б$	9	10	16	0	0	0	B_i	Θ
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	0			0	1		0		
x_3	16			1	0		0		
x_6	0			0	0		1		
Δj =									

новый коэффициент

новая переменная

единичная подматрица

Рис.2.3

При этом в столбцах базисных векторов на пересечении строк и столбцов одноименных переменных должны стоять 1, а остальные координаты должны быть 0.

5. Формируем строку в рабочей области новой СМ-таблицы для новой переменной. Для этого необходимо каждый элемент этой строки в *прежней* СМ-таблице разделить на разрешающий элемент и записать результат деления на соответствующее место в *новой* СМ-таблице.

Схематично этот процесс показан на рис. 2.4.

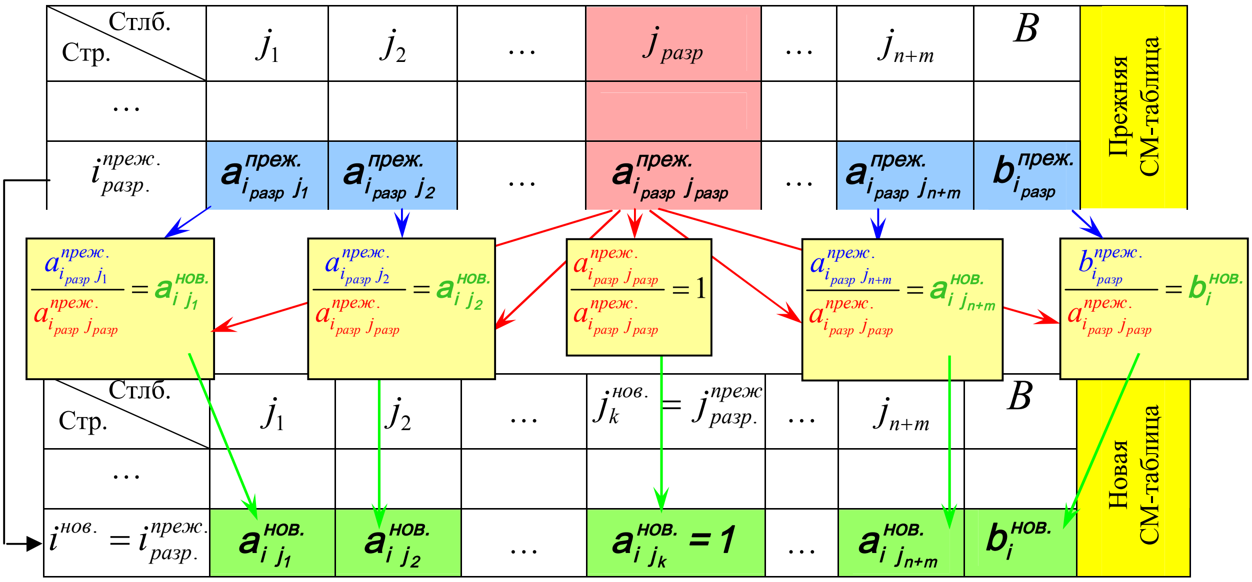


Рис.2.4

Например, для элемента 2-й - разрешающей строки 1-го столбца рабочей области СМ-таблицы

$$a_{12}^{новый} = \frac{a_{2_{разр}1}^{прежний}}{a_{23_{разр}}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Результаты деления показаны на рис. 2.4.

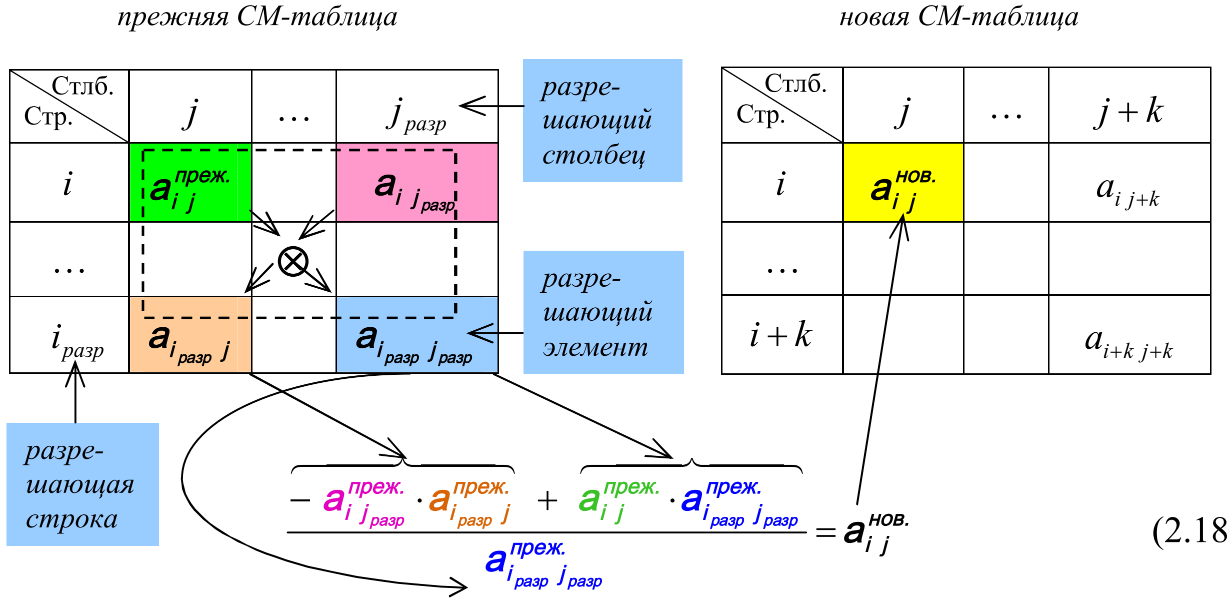
Базис	$C_j^б$	9	10	16	0	0	0	B_i	Θ
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	0			0	1		0		
x_3	16	$3/4$	$1/2$	1	0	$1/8$	0	$192/8 = 24$	←
x_6	0			0	0		1	разрешающая строка в прежней СМ-таблице	
Δj =									

Рис.2.5

Отметим, что элемент бывший разрешающим в прежней СМ-таблице, в новой СМ-таблице становится равным 1. *Это не случайное совпадение, а закономерный факт*, поскольку в новой СМ-таблице этот элемент является координатой единичного вектора и «стоит» на пересечении одноименных строки и столбца.

6. Остальные элементы новой СМ-таблицы формируем по ***правилу прямоугольника***, действие которого схематично изображено на рис.2.6.

На месте элемента $a_{i\,j}^{преж.}$ в прежней СМ-таблице формируется элемент $a_{i\,j}^{нов.}$ в новой СМ-таблице на основе вычислений по формуле (2.18). При этом элементы прежней СМ-таблицы, участвующие в вычислении, являются вершинами воображаемого прямоугольника как показано на рис 2.6, отсюда и название правила.



$$\frac{-\,a_{i\,j_{разр}}^{преж.}\cdot a_{i_{разр}\,j}^{преж.}+a_{i\,j}^{преж.}\cdot a_{i_{разр}\,j_{разр}}^{преж.}}{a_{i_{разр}\,j_{разр}}^{преж.}}=a_{i\,j}^{нов.} \tag{2.18}$$

Рис. 2.6

Следует отметить, что при вычислении по формуле (2.18) необходимо обязательно учитывать знаки элементов в прежней СМ-таблице.

Например, элемент, стоящий в новой СМ-таблице на пересечении 1-й строки и 1-го столбца будет равен

$$\frac{-\,a_{1\,3_{разр}}^{преж.}\cdot a_{3_{разр}\,1}^{преж.}+a_{1\,1}^{преж.}\cdot a_{3_{разр}\,3_{разр}}^{преж.}}{a_{3_{разр}\,3_{разр}}^{преж.}}=a_{1\,1}^{нов.}=\frac{-12\cdot 6+18\cdot 8}{8}=9.$$

Аналогично

$$\frac{-\,a_{1\,3_{разр}}^{преж.}\cdot a_{3_{разр}\,2}^{преж.}+a_{1\,2}^{преж.}\cdot a_{3_{разр}\,3_{разр}}^{преж.}}{a_{3_{разр}\,3_{разр}}^{преж.}}=a_{1\,1}^{нов.}=\frac{-12\cdot 4+15\cdot 8}{8}=9,$$

и т.д., продолжая процесс для всех остальных элементов новой СМ-таблицы. Результаты вычисления по правилу прямоугольника заносятся в новую СМ-таблицу (см. табл.2.2).

Табл. 2.2

Базис	$C_j^б$	9	10	16	0	0	0	B_i	Θ
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	0	9	9	0	1	$-3/2$	0	72	
x_3	16	$3/4$	$1/2$	1	0	$1/8$	0	24	
x_6	0	$11/4$	$3/2$	0	0	$-3/8$	1	108	
$\Delta j\ =$									

Таким образом, переход к новой СМ-таблице завершен. Операции 1 - 6 составляют содержание первого шага вычислений – *первой итерации*.

2.6. Далее процесс будет повторяться точно так же, как и на первом шаге, поэтому все вычисления и выводы можно сделать абсолютно аналогично.

Так, из анализа 2-й СМ-таблицы можно найти координаты следующей угловой точки многогранника ОДР

$$\overline{X}^{(1)} = \left(\underbrace{x_1^{(1)} = 0,\ x_2^{(1)} = 0,\ x_5^{(1)} = 0;}_{n=3 \text{ свободных переменных}}\ \underbrace{x_4^{(1)} = 72,\ x_3^{(1)} = 192,\ x_6^{(1)} = 108}_{m=3 \text{ базисных переменных}} \right),$$

в которой значение ЦФ

$$z\left(\overline{X}^{(1)}\right) = \overline{C} \cdot \overline{X}^{(1)} = 384.$$

В полном соответствии с теоремой 2.5 значения ЦФ явно улучшилось.

Далее вычисляем значения Δ- оценок переменных задачи и на основании их анализа делаем вывод, что оптимальной решение еще не достигнуто, т.к. $\Delta_2 = -2 < 0$ (см. табл.2.3)

Табл.2.3

Базис	$C_j^б$	9	10	16	0	0	0	B_i	Θ
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	0	9	9	0	1	$-3/2$	0	72	8
x_3	16	$3/4$	$1/2$	1	0	$1/8$	0	24	48
x_6	0	$11/4$	$3/2$	0	0	$-3/8$	1	108	72
Δj =		3	-2	0	0	2	0	**384**	

Выбираем, разрешающий столбец (2-й), разрешающую строку (1-я) и соответственно разрешающий элемент 2-й СМ-таблицы (результаты показаны в табл.2.3).

Далее, точно так же, как и на 1-м шаге, осуществляем переход к следующей угловой точке многогранника ОДР, формируя *3-ю СМ-таблицу*

Табл.2.4

Базис	$C_j^б$	9	10	16	0	0	0	B_i	Θ
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_2	10	1	1	0	$1/9$	$-1/6$	0	8	
x_3	16	$1/4$	0	1	$-1/18$	$5/24$	0	20	
x_6	0	$5/4$	0	0	$-1/6$	$-1/8$	1	96	
Δ_j =		5	0	0	$2/9$	$5/3$	0	**400**	

В 3-й СМ-таблице получены компоненты нового опорного плана, т.е. координаты следующей угловой точки

$$\overline{X}^{(2)} = \left(\underbrace{x_1^{(2)} = 0,\ x_4^{(2)} = 0,\ x_5^{(2)} = 0;}_{n=3 \text{ свободных переменных}}\ \underbrace{x_2^{(2)} = 8,\ x_3^{(2)} = 20,\ x_6^{(2)} = 96}_{m=3 \text{ базисных переменных}} \right),$$

в которой значение ЦФ

$$z\left(\overline{X}^{(2)}\right) = \overline{C} \cdot \overline{X}^{(2)} = 400\,.$$

Анализ Δ- оценок переменных в табл. 2.4 показывает, что условия теоремы 2.3 полностью выполнены, следовательно, оптимальный план найден, т.е.

$$\overline{X}^{*} = \overline{X}^{(2)} \text{ и } z\left(\overline{X}^{*}\right) = z\left(\overline{X}^{(2)}\right).$$

Таким образом, для достижения максимального дохода фирме необходимо производить 8 ед. продукции 2-го типа ($x_2^{(2)} = x_2^{*} = 8$) и 20 ед. продукции 3-го типа ($x_3^{(2)} = x_3^{*} = 20$). Продукцию 1-го типа в заданных условиях, оказывается, лучше вообще не производить ($x_1^{(2)} = x_1^{*} = 0$), но при этом остаток 3-го ресурса составит 96 ед. ($x_6^{(2)} = x_6^{*} = 96$).

2.6. Рассмотренный выше алгоритм СМ с применением СМ-таблиц по способу Данцига представляет собой циклический процесс, на каждом шаге которого выполняются одни и те же операции. Меняются только данные: выходные данные предыдущего шага являются входными данными для следующего. Можно дать краткое описание этих операций:

1. Формируется очередная СМ-таблица.
2. Находят очередной опорный план и значение ЦФ.
3. Проверяют полученный план на оптимальность с помощью Δ- оценок переменных задачи. Причем:
   3.1) если для j- го столбца с оценкой $\Delta_j < 0$ все его элементы $a_{ij} < 0$ - задача не имеет решения;
   3.2) если в j- м столбце с оценкой $\Delta_j < 0$ существуют элементы $a_{ij} \geqslant 0$ - можно перейти к другому плану, в котором значение ЦФ заведомо лучше предыдущего.
4. Определяют разрешающий столбец, разрешающую строку и разрешающий элемент в очередной СМ-таблице.
5. Формируется новая СМ-таблица.
6. Находят новый опорный план и значение ЦФ.

7. Проверяют полученный план на оптимальность с помощью Δ- оценок переменных задачи.
   7.1) если все элементы Δ- строки $\Delta_j \geqslant 0$ - полученный план является оптимальным;
   7.2) в противном случае – возвращаемся к п.1.
8. Завершение работы алгоритма СМ.

В лекции 1 на наглядных геометрических примерах было показано, что задача ЛП в общем случае может иметь как единственное решение, так и бесконечное их множество.

В алгоритме СМ существуют алгебраические признаки, определяющие их существование.

Теорема 2.6. Если в Δ- строке СМ-таблицы, содержащей оптимальный план, есть ***все*** оценки ***свободных*** переменных $\Delta_j > 0$, то задача ЛП имеет *единственное решение* (единственный оптимальный план).

Так, например, в оптимальной СМ-таблице для рассмотренной выше задачи 2.1, Δ- оценки *свободных* переменных x_1, x_4 и x_5 строго положительны

$$\Delta_1 = 5,\ \Delta_4 = 2/9,\ \Delta_5 = 5/3.$$

Это как раз и есть признак того, что для задачи ЛП в заданных условиях существует *только один оптимальный план*, который и был найден.

Теорема 2.7. Если в Δ- строке СМ-таблицы, содержащей оптимальный план, есть ***хотя бы одна*** оценка $\Delta_j = 0$ для ***свободной*** переменной, то задача ЛП имеет *бесконечное множество решений* (альтернативных оптимальных планов).

Чтобы найти хотя бы один альтернативный план из их бесконечного множества, необходимо в качестве разрешающего столбца выбрать именно тот j-столбец *свободной переменной*, для которого в оптимальной СМ-таблице получена нулевая оценка $\Delta_j = 0$.

Далее аналогично выбирают разрешающие строку и элемент СМ-таблицы, делают еще один шаг СМ-преобразований и формируют «новую» оптимальную СМ-таблицу. Компоненты «нового» оптимального плана являются координатами альтернативного решения $\overline{X}^*_{альт.}$ задачи ЛП и будут отличаться от предыдущего $\overline{X}^*$

$$\overline{X}^*_{альт.} \neq \overline{X}^*.$$

Однако при этом оптимальное значение ЦФ ***не должно измениться***:

$$z\left(\overline{X}^*_{альт.}\right) = z\left(\overline{X}^*\right),$$

поскольку обе точки $\overline{X}^*_{альт.}$ и $\overline{X}^*$ принадлежат одной и той же *плоскости уровня* (см. лекцию 1) в n - мерном пространстве.

2.7. В заключение рассмотрим пример автоматизированного решения задачи ЛП симплекс-методом с помощью компьютерной программы Пакет Экономических Расчетов (ПЭР). Подробные инструкции по работе с ПЭР приведены в «Методическом пособии к выполнению лабораторных работ». Здесь отметим только некоторые особенности реализации алгоритма СМ в этой программе.

Введем математическую модель задачи 2.1 в ПЭР и сформируем начальную СМ-таблицу.

НАЧАЛЬН.ТАБЛИЦА

		X1	X2	X3	S1	S2	S3		B(i)
Базис	C(j)	9.000	10.00	16.00	0	0	0	B(i)	A(i,j)
S1	0	18.00	15.00	12.00	1.000	0	0	360.0	0
S2	0	6.000	4.000	8.000	0	1.000	0	192.0	0
S3	0	5.000	3.000	3.000	0	0	1.000	180.0	0
C(j)-Z(j)		9.000	10.00	16.00	0	0	0	0	
* Big M		0	0	0	0	0	0	0	

Рис. 2.6

Как видно из рис. 2.6, в программе ПЭР есть отличия в обозначениях переменных, строк и столбцов. Дополнительные переменные задачи x_4, x_5, x_6 здесь обозначаются символами s_1, s_2, s_3. Крайний правый столбец обозначается не так как было принято в программе ручного счета - Θ - рассмотренной выше в п.2.6. По-другому обозначается и Δ - строка $(c(j)-z(j))$, а также коэффициенты при переменных в ЦФ и сами переменные поменялись местами.

Но это все отличия, как говорится, по форме. Главное отличие по содержанию – это элементы Δ - строки. В ПЭР они вычисляются по формуле

$$\Delta_j \quad c_j = \sum_{i=1}^{m} c_j^{б} \cdot a_{ij}, \; j=\overline{1,n}, \tag{2.20}$$

которая, как нетрудно сравнить, прямо противоположна формуле (2.18). Это связано с особенностями аппаратной реализации программы ПЭР на первых персональных компьютерах.

Именно поэтому все элементы Δ - строки начальной СМ-таблицы ПЭР – неотрицательные ($\Delta_j \geqslant 0$), в то время как в программе ручного счета – неположительные ($\Delta_j \leqslant 0$). Но по модулю они, естественно, одинаковы.

Отсюда следует, что *критерий оптимальности в ПЭР* также противоположен критерию оптимальности в программе ручного счета: *все элементы* Δ *- строки в оптимальной СМ-таблице должны быть неположительные* - $\Delta_j \leqslant 0$.

Во всем остальном, что касается СМ-преобразований при переходе к новому опорному плану, программа ПЭР абсолютно аналогична программе ручного счета.

В этом можно убедиться, если получить в ПЭР СМ таблицу 1-й итерации (см. рис. 2.7).

Итерация 1

Базис	C(j)	X1	X2	X3	S1	S2	S3	B(i)	B(i) / A(i,j)
		9.000	10.00	16.00	0	0	0		
S1	0	18.00	15.00	12.00	1.000	0	0	360.0	30.00
S2	0	6.000	4.000	8.000	0	1.000	0	192.0	24.00
S3	0	5.000	3.000	3.000	0	0	1.000	180.0	60.00
C(j)-Z(j)		9.000	10.00	16.00	0	0	0	0	
* Big M		0	0	0	0	0	0	0	

ТЕКУЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ (Max.) = 0

< Выделенная переменная - введенная или выведенная перемен.>

ВВОДИМ : X3 Выводим: S2

Рис.2.7

Здесь выделены цветом и даже написаны (внизу) те переменные, которые соответственно вводятся (x_3) и выводятся (s_2) из текущего базиса. Кроме того, синим цветом выделены Δ - оценка разрешающего столбца (16), θ - оценка разрешающей строки (24) и разрешающий элемент (8).

В СМ-таблице итерации 2 программы ПЭР (см. рис.2.8) сформированы данные после перехода к новому базису.

Итерация 2

Базис	C(j)	X1	X2	X3	S1	S2	S3	B(i)	B(i) / A(i,j)
		9.000	10.00	16.00	0	0	0		
S1	0	9.000	9.000	0	1.000	-1.50	0	72.00	8.000
X3	16.00	0.750	0.500	1.000	0	0.125	0	24.00	48.00
S3	0	2.750	1.500	0	0	-.375	1.000	108.0	72.00
C(j)-Z(j)		-3.00	2.000	0	0	-2.00	0	384.0	
* Big M		0	0	0	0	0	0	0	

ТЕКУЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ (Max.) = 384

< Выделенная переменная - введенная или выведенная перемен.>

ВВОДИМ : X2 Выводим: S1

Рис.2.8

Простым сравнением с аналогичной таблицей программы ручного счета – табл. 2.3 – можно убедиться, что данные обеих таблиц абсолютно идентичны, если не считать того, что в ПЭР использованы десятичные дроби, а в программе ручного счета – простые.

Кроме того, здесь также синим цветом выделены результаты анализа таблицы на оптимальность (Δ - оценка разрешающего столбца (2)), а также подготовительных операций по переходу к новому базису: переменные, которые соответственно вводятся (x_2) и выводятся (s_1) из текущего базиса, θ - оценка разрешающей строки (8) и разрешающий элемент (9).

Следующая СМ-таблица в ПЭР (см. рис 2.9) является конечной, что так же совпадает с программой ручного счета.

КОНЕЧНАЯ ТАБЛИЦА (Всего итерац.= 2)

Базис	C(j)	X1	X2	X3	S1	S2	S3	B(i)	B(i) / A(i,j)
		9.000	10.00	16.00	0	0	0		
X2	10.00	1.000	1.000	0	0.111	-.167	0	8.000	0
X3	16.00	0.250	-.000	1.000	-.056	0.208	0	20.00	0
S3	0	1.250	-.000	0	-.167	-.125	1.000	96.00	0
C(j)-Z(j)		-5.00	0	0	-.222	-1.67	0	400.0	
* Big M		0	0	0	0	0	0	0	

(Max.) Оптим.величина ЦФ = 400

Рис.2.9

Вновь сравнением данных с табл. 2.4 убеждаемся в полном совпадении результатов работы программ автоматизированного и ручного счета. Оптимальный план, полученный в ПЭР и оптимальное значение ЦФ задачи 2.1 полностью совпадают с результатами решения этой задачи на стр. 17.